Matematika A2. Jméno: Termín: Datum:

---

1. a) Ukažte, že množina všech řešení diferenciální rovnice $y'' + py' + qy = 0$ ($p, q \in R$) tvoří vektorový prostor (V_H). (2b)
   b) Co nazýváme fundamentálním systémem řešení diferenciální rovnice $y'' + py' + qy = 0$ ($p, q \in R$) ?
   Popište fundamentální systém řešení pro všechny možnosti řešení charakteristická rovnice. (2b)
   c) Najděte řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 2\cos x + x^2 + 1$, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = 1, y'(0) = 0$. (8b)

---

2. Je dána funkce $f(x,y) = \sqrt{y + \frac{1}{x}}$.
   a) Najděte a načrtněte její definiční obor . Je $D(f)$ množina otevřená nebo uzavřená? Tvrzení odůvodněte. (3b)
   b) Vypočítejte $\nabla f(-1,2)$. (1b)
   c) Napište, co znamená, že funkce $f : M \subset R^n \to R$ je diferencovatelná v bodě $a \in M$ (M je otevřená množina) a co nazýváme totálním diferenciálem funkce f v bodě a . (3b)
   d) Ukažte, že funkce f je v bodě $(-1,2)$ diferencovatelná a určete v tomto bodě totální diferenciál funkce f . (3b)
   e) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v $(-1,2,1)$. (2b)
   f) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř ? (2b)

---

3. a) Vypočítejte objem tělesa, které je ohraničené rovinou $z = 0$ a válcovými plochami $z = 4 - y^2$ a $y = \frac{x^2}{2}$. (7b)
   b) Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z = 0$ a plochami $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 + 1$, je-li hustota tělesa $h(x,y,z)$ přímo úměrá vzdálenosti bodu (x,y,z) od osy z . (7b)
   c) Formulujte nutnou podmínku a některou z postačujících podmínek existence Reimannova integrálu $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$. (2b)

---

4. a) Definujte pojmy
      i) potenciální vektorové pole v oblasti $\omega \subset R^3 \left(R^2\right)$ a potenciál vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^3 \left(R^2\right)$; (2b)
      ii) vektor rotace $\operatorname{rot} \vec{f}$ pro hladké vektorové pole $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, zadané na oblasti $\omega \subset R^3$. (2b)
   b) Formulujte nutnou podmínku i postačující podmínky pro potenciálnost vektorového pole v oblasti $\omega \subset R^2$. (2b)

   c) Je dáno vektorové pole $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{y}{1 + x^2 y^2}, \frac{x}{1 + x^2 y^2} \right)$.
      i) Dokažte,že toto pole je potenciální v celé rovině. (2b)
      ii) Určete potenciál tohoto pole. (4b)
      iii) Vypočítejte křivkový integrál tohoto pole $\vec{f}$ po kladně orientované kružnici o středu v počátku a poloměru *R*. (2b)

---

5. a) Napište, co znamená, že nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje, resp. absolutně konverguje, resp. diverguje. (2b)
   b) Formulujte srovnávací kriterium konvergence nevlastního integrálu $\int_a^\infty f(x)dx$. (2b)
   c) Rozhodněte o konvergenci nevlastního integrálu $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 1} dx$. (4b)

nebo (na druhé straně)

5. a) Vysvětlete, co znamená, že rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce . $z=z(x,y)$. (1b)

Formulujte větu o implicitní funkci pro tento případ. (3b)

b) Dokažte, že rovnicí

$$z^4-x^3yz^2-xz+y^3=0$$

je definována v okolí bodu $(1,1,1)$ implicitní funkce $z=z(x,y)$. (2b)

c) Pomocí lineární aproximace vypočítejte přibližně hodnotu $z\,(1{,}01;\,0{,}96)$. (6b)

d) Vypočítejte smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $z=z(x,y)$ v bodě $(1,1)$ (4b)

nebo

5. a) (i) Buďte V a W vektorové prostory a L zobrazení z V do W. Co znamená, že L lineární zobrazení? (1b)

(ii) Nechť L je lineární zobrazení V do W a $\vec{o}$ nechť je nulový prvek W.

Ukažte, že množina vektorů $\vec{v}\in V$, pro které platí $L(\vec{v})=\vec{o}$, je podprostor prostoru V. (2b)

b) Nechť L je lineární zobrazení , $L: R^3 \to R^3$, pro které platí:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}.$$ Najděte $L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ pro lib.vektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^3$. (2b)

c) Vysvětlete , jak je definováno inverzní zobrazení k zobrazení L . (1b)

Existuje k zobrazení L inverzní zobrazení ? Pokud ano, najděte je. (4b)